数理解析研究所講究録
360巻 1979年 212-242

超関数論の応用

工学院大学　今井　功

§1. はじめに

佐藤の超関数論を理工学の諸問題に応用したいという立場で，できるだけ少ない数学的知識を前提としてその解釈を試みる。そのために，流体力学的なアナロジーを活用する。今回はとくに Hilbert 変換に関する諸公式を導く。

§2. 超関数の基本的性質

まず，超関数に関する定義，演算，記号などをまとめておく。

x 軸上の区間 (a,b) を含む領域 D を考える。D の上半平面内にある領域を D_+，下半平面内にある領域を D_- とする（図1）。D_+ (D_-) で

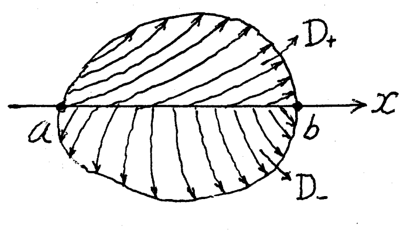

図1

正則な解析関数を $F_+(z)$ $(F_-(z))$ とする。$F_\pm(z)$ はそれぞれ

$D_\pm$ でおこる渦無しでわき出し無しの流れを表わす<u>複素速度</u>と解釈される．このとき，区間 (a, b) には一般に速度の不連続が存在するから，(a, b) には‘渦’および‘わき出し’の分布が存在することになる．その分布を x の関数として $f(x)$ と書く．すなわち，解析関数 $F_+(z)$，$F_-(z)$ の 1 対に対応して $f(x)$ が考えられる。

図 1 のばあいは $f(x)$ は<u>ふつうの関数</u>である．ところが，

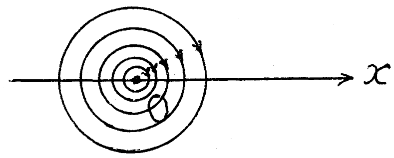

図 2

$$F_+(z) = F_-(z) = \frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{z}$$

のばあいには，流れは原点 $z = 0$ におかれた強さ 1 の‘渦糸’によるもので，$f(x)$ は<u>ふつうの関数</u>としては表わされない（図 2）．強いていえば，$f(x) = 0$ $(x \neq 0)$，$f(0) = \infty$ であるが，∞ の意味があいまいである．このようなばあいにも $f(x)$ に明確な意味を与えるものとして，<u>超関数</u>の概念が導入される．

解析関数の 1 対 $[F_+(z), F_-(z)]$ を一括して $F(z)$ と書き表わし，これが超関数 $f(x)$ を<u>産み出す</u>（generate）という．記号的に

$$f(x) = \mathrm{H.F.}\ F(z), \quad F(z) = \mathrm{G.F.}\ f(x)$$

と表わす．$F(z)$ を超関数（Hyperfunction）$f(x)$ の母関数（Generating function）という．$F_+(z)$，$F_-(z)$ をそれぞれ $F(z)$ の上成分，下成分という。

(i) 超関数の値

超関数 $f(x)$ の $x=x_0$ での値を

$$f(x_0) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x_0+i\varepsilon)-F(x_0-i\varepsilon)\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\{F_+(x_0+i\varepsilon)-F_-(x_0-i\varepsilon)\}$$

によって定義する．（右辺の極限値が存在しないばあいには $f(x_0)$ は存在しない！）　x_0 を変化させると $f(x_0)$ は（その値が存在するかぎり）ふつうの関数を与える．これを O.F. $f(x)$ と表わし，'超関数 $f(x)$ を見直したふつうの関数' とよぶ．すなわち

$$\text{O.F. } f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}$$

である。

（例）　超関数 0，1，$\delta(x)$

$$0 \overset{\text{def}}{=\!=} \text{H.F. } \varphi(z), \qquad \varphi(z) \text{ は } x \text{ 軸上で正則}$$

$$1 \overset{\text{def}}{=\!=} \text{H.F. } \mathbb{1}(z) = \text{H.F. } \mathbb{1}_+(z) = \text{H.F. } \mathbb{1}_-(z)$$

$$\mathbb{1}(z)=\left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right],\quad \mathbb{1}_+(z)=[1,0],\ \mathbb{1}_-(z)=[0,-1]$$

$$\delta(x)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\text{H.F. }\delta(z),\qquad \delta(z)=-\frac{1}{j}\frac{1}{z},\quad j=2\pi i$$

$$\text{O.F. }0=0,\quad \text{O.F. }1=1,\quad \text{O.F. }\delta(x)=0\ \ (x\neq 0)$$

(ii) 超関数の演算

超関数 $f(x)$ に対しても，加減乗除，微分・積分，たたみこみ，Fourier変換… などの演算を，ふつうの関数に対するものと同じ（あるいは類似の）規則で実行できることが望ましい．そこで，演算を一般に象徴的に $\mathcal{O}$ で表わすと，

$$\text{O.F.}\{\mathcal{O}_{\text{H.F.}}f(x)\}=\mathcal{O}_{\text{O.F.}}\{\text{O.F.}f(x)\}$$

が成り立つことを要請する．$\mathcal{O}$ の添字 H.F., O.F. はそれぞれ超関数およびふつうの関数に対する演算であることを意味する．この要請が満されているとき，演算規則 $\mathcal{O}$ は合理的に定義されているという．（演算規則が合理的でなければ，実際問題に応用することはできないだろう．）

§3. 超関数の演算

上の要請に応じて，種々の演算が定義されている．以下に定義，記号などを，簡単な説明とともに列挙する．

超関数の相等性：

$$f_1(x) = f_2(x) \iff f_1(x) - f_2(x) = 0 \quad (\text{超関数の}0)$$

母関数の同等性：

$$F_1(z) \cong F_2(z) \iff f_1(x) = f_2(x)$$

線形結合：　$c_1,\ c_2$ は複素数

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)\}$$

解析関数との積：

$$\varphi(x)\cdot f(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\varphi(z) F(z)\}$$

ただし，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則

微分：

$$f'(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\ F'(z)$$

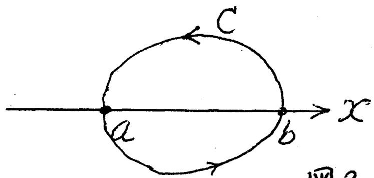

図3

定積分：　（図3）

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int_C F(z)\,dz$$

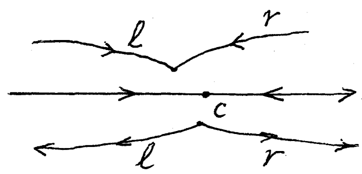

図4

Fourier変換：　（図4）

$$g(\xi) = \mathcal{F} f(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\ G(\zeta)$$

$$G(\zeta) = \mathcal{F} F(z) \overset{\text{def}}{=} \left[\int_l, \int_r\right] F(z) e^{-j\zeta z}\,dz = \left[\int_{-\infty}^{c}, \int_{\infty}^{c}\right] f(x) e^{-j\zeta x}\,dx$$

$$g(\xi) = \mathcal{F} f(x) = \left[\int_{-\infty}^{c} f(x) e^{-j\xi x}\,dx\right]_+ + \left[\int_{c}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x}\,dx\right]_-$$

ただし，　$[\varphi(x)]_\pm \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\varphi(z) 1\!\!1_\pm(z)\} \equiv \varphi(x \pm i0)$

$\varphi(z)$ は $0 \lessgtr \operatorname{Im} z \lessgtr A_\pm$ で正則

たたみこみ：

超関数と解析関数 $f(x) * \varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(x-t)\,dt$

超関数と母関数 $f_1(x) * F_2(z) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) F_2(z-t)\,dt$

超関数と超関数 $f_1(x) * f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{f_1(x) * F_2(z)\}$

§4. 種々の超関数

ふつうの関数を見直した超関数：

(i) $f(x)_{\text{H.F.}} \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\ F(z)$, $F(z) = \frac{1}{j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)_{\text{O.F.}}}{t-z}\,dt$

ただし, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)_{\text{O.F.}}|\,dt < +\infty$

(ii) $f(x)_{\text{H.F.}} \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\ F(z)$, $F(z) = \frac{\varphi(z)}{j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)_{\text{O.F.}}}{\varphi(t)(t-z)}\,dt$

ただし, $\int_{-R}^{R} |f(t)_{\text{O.F.}}|\,dt < +\infty$. (R：任意) $\varphi(z)$ は x 軸上に零点をもたず, $|x| \to \infty$ で急速に ∞ になる任意の解析関数.

1価解析関数：

$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\psi(z)\mathbb{1}(z)\}$

1価解析関数と既知の超関数との形式積：

$\psi(x) \circ f(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\psi(z)F(z)\}$

(例) $H(x)$, $\operatorname{sgn} x$, べキ型の超関数

$H(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\ H(z)$, $H(z) = -\frac{1}{j}\operatorname{Log}(-z)$

$\operatorname{sgn} x \overset{\text{def}}{=} H(x) - H(-x)$, m は任意の整数

$x^m \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{z^m \mathbb{1}(z)\}$, $\mathbb{1}(z) = H(z) - H(-z)$

$$|x|^\alpha H(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.} \frac{i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha} \qquad \alpha \text{ は非整数}$$

$$\left.\begin{array}{l} |x|^\alpha \\ |x|^\alpha \operatorname{sgn} x \end{array}\right\} \overset{\text{def}}{=} |x|^\alpha H(x) \pm |x|^\alpha H(-x) \qquad \alpha : \text{任意}$$

§ 5. パラメーターに関する演算

$$f(x,\alpha) = \text{H.F. } F(z,\alpha), \qquad f_n(x) = \text{H.F. } F_n(z)$$

$$\lim_\alpha f(x,\alpha) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\lim_\alpha F(z,\alpha)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(z,\alpha)$$

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.} \sum_{n=1}^\infty F_n(z)$$

$$\int f(x,\alpha)\,d\alpha \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.} \int F(z,\alpha)\,d\alpha$$

諸定理： $\lim_\alpha f(x,\alpha) = f(x)$ が存在するならば

$$\lim_\alpha f(ax+b,\alpha) = f(ax+b)$$

$$\lim_\alpha \varphi(x) f(x,\alpha) = \varphi(x) f(x)$$

$$\lim_\alpha \frac{\partial}{\partial x} f(x,\alpha) = f'(x)$$

$$\lim_\alpha \overline{f(x,\alpha)} = \overline{f(x)}$$

$$\lim_\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)$ が存在するならば

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \overline{f(x,\alpha)} = \overline{\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \{\varphi(x) f(x,\alpha)\} = \varphi(x) \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \{A(\alpha) f(x,\alpha)\} = A'(\alpha) f(x,\alpha) + A(\alpha) \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(x,\alpha)\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\mathcal{F}f(x,\alpha)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\right\}$$

べキ型関数の定義：

$$|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H.F.}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{n}\frac{i(-z)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\right\}$$

$$x^{m}(\log|x|)^{n}H(x) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H.F.}\left\{z^{m}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^{n}}{\partial\varepsilon^{n}}P(z,\varepsilon)\right\}$$

$$P(z,\varepsilon) = \frac{i\{(-z)^{\varepsilon}-1\}}{2\sin\pi\varepsilon}, \qquad H \equiv H(z) = -\frac{1}{j}\mathrm{Log}(-z)$$

$$= H - \frac{1}{2}\varepsilon j H^{2} + \frac{1}{6}\varepsilon^{2}j^{2}\left(H^{3}-\frac{1}{4}H\right) - \frac{1}{24}\varepsilon^{3}j^{3}\left(H^{4}-\frac{1}{2}H^{2}\right)+\cdots$$

$$\left.\begin{matrix}|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n} \\ |x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}\operatorname{sgn}x\end{matrix}\right\} \overset{\text{def}}{=} |x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x) \pm |x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(-x)$$

<u>定理</u>：任意の複素数 α に対して，ε のべキ級数として形式的につぎの関係が成り立つ．

$$|x|^{-\alpha}e^{\varepsilon\log|x|}H(x) = |x|^{-\alpha+\varepsilon}H(x) + \frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\delta^{(\alpha-1)}(x)$$

ただし，$\alpha \neq m$ $(m=1,2,\ldots)$ に対しては右辺の才2項は消えるものとする．

この定理を用いれば，非整数の α に対する公式から，整数 m に対する公式が容易に得られる．

§6. 射影

ある区間で定義された超関数について，その定義区間を拡張しようとする際に，射影の概念が重要である．

一般δ関数：

1点 $x=a$ を除いて 0 に等しい超関数を点 $x=a$ での一般δ関数とよび，記号 $\delta_\infty(x-a)$ で表わす．また，偶および奇の一般δ関数をそれぞれ $\delta_\infty^e(x-a)$，$\delta_\infty^o(x-a)$ で表わす．

$$\delta_\infty(x-a)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\delta^{(n)}(x-a)$$

$$\delta_\infty^e(x-a)=\sum_{n=\text{偶}}^{\infty}A_n\delta^{(n)}(x-a)$$

$$\delta_\infty^o(x-a)=\sum_{n=\text{奇}}^{\infty}A_n\delta^{(n)}(x-a)$$

定理： 孤立点を除いてたがいに等しい2つの超関数は，一般δ関数を除いて一致する．

射影：

1点への射影： 点 $x=a$ を含む区間で定義された超関数 $f(x)$ に対して，その $x=a$ での δ成分 すなわち $f(x)\delta(x;a)$ を，$f(x)$ の $x=a$ への射影という．また射影を求める演算のことも射影とよび，記号 $\mathcal{P}(a)$ で表わす．すなわち

$$\mathcal{P}(a)f(x) = f(x)\delta(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \delta^{(n)}(x-a)$$

であって，A_n は $f(x)$ によってきまる定数（ふつう，有限個を除いて 0）である．

<u>区間への射影</u>： 区間 (a,b) またはこれを含むある区間で定義された超関数 $f(x)$ に対して

$$f(x)H(x;a,b) = \begin{cases} f(x), & a<x<b \\ 0, & x<a,\ x>b \end{cases}$$

を満たし，$x=a$，$x=b$ で一般δ関数を含まない超関数 $f(x)H(x;a,b)$ を，$f(x)$ の区間 (a,b) への<u>射影</u>という．またそれを求める演算のことも射影とよび，記号 $\mathcal{P}_a^b$ または $\mathcal{P}(a,b)$ で表わす．すなわち

$$\mathcal{P}_a^b f(x) \equiv \mathcal{P}(a,b)f(x) = f(x)H(x;a,b)$$

射影によって超関数の定義区域は $(-\infty,\infty)$ まで拡大されることに注意しなければならない．

<u>ふつうの関数の超関数への見直し</u>： 区間 (a,b) の内部で孤立点を除いて正則なふつうの関数 $f(x)$ は

$$\sum_{p=0}^{N} \mathcal{P}(a_p, a_{p+1}) f(x)$$

によって超関数と見直すことができる．ただし，a_p ($p=1,2,\dots N$) はその孤立点，$a_0=a$，$a_{N+1}=b$ とする．

(例) $\mathcal{P}_0^\infty x^\alpha = |x|^\alpha H(x)$, $\mathcal{P}_0^\infty x^\alpha (\log x)^n = |x|^\alpha (\log|x|)^n H(x)$

射影に関する諸定理：

$$\mathcal{P}_a^b f(x) = \mathcal{P}_a^c f(x) + \mathcal{P}(c) f(x) + \mathcal{P}_c^b f(x), \quad a<c<b$$

$$\mathcal{P}_a^b = \sum_{p=0}^{N} \mathcal{P}(a_p, a_{p+1}) + \sum_{p=1}^{N} \mathcal{P}(a_p),$$

$$a_0 \equiv a < a_1 < a_2 < \cdots < a_N < b \equiv a_{N+1}$$

$$\mathcal{P}(a)\mathcal{P}(b) = \begin{cases} \mathcal{P}(a), & a=b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

$$\mathcal{P}(a_1, b_1)\mathcal{P}(a_2, b_2)\cdots\mathcal{P}(a_n, b_n) = \mathcal{P}(a, b)$$

$$a = \max(a_1, \ldots, a_n), \quad b = \min(b_1, \ldots, b_n)$$

$$\mathcal{P}(a,b)\mathcal{P}(c) = \mathcal{P}(c)\mathcal{P}(a,b) = \begin{cases} \mathcal{P}(c), & a<c<b \\ 0, & c \leqq a, \ b \geqq c \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}_a^b \{\varphi(x) f(x)\} &= \varphi(x) \mathcal{P}_a^b f(x) \\ \mathcal{P}(c)\{\varphi(x) f(x)\} &= \varphi(x)\mathcal{P}(c) f(x) \end{aligned}\right\} \quad \varphi(x) \text{ は } [a,b] \text{ で正則.} \ a<c<b$$

$f(x)$ が $f(a\pm 0)$, $f(b\pm 0)$ をもつならば

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_{a'}^{b'} f(x) = \mathcal{P}_{a'}^{b'} f'(x) + f(a')\delta(x-a) - f(b')\delta(x-b)$$

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}(a) f(x) = \mathcal{P}(a) f'(x) - \{f(a+0) - f(a-0)\}\delta(x-a)$$

ただし, $a' = a \pm 0$, $b' = b \pm 0$ (複号順序任意). ($a = -\infty$, $b = \infty$ であってもよい.)

$$\mathcal{P}_{a'}^\infty f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\mathcal{P}_{a'}^\infty f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(a')\delta^{(n-m-1)}(x-a)$$

ただし, $a' = a \pm 0$. また $f^{(m)}(a')$ が存在するとする。

§7. 超関数どうしの積

2つの超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ は一般的には合理的にその'積'を定義することができない。しかし、ある種の条件のもとでは、積の定義は可能で、しかも実際上きわめて重要である。

1) 1価解析関数を見直した超関数どうしの積

$$\psi_1(x)\cdot\psi_2(x) \overset{def}{=} \text{H.F.}\{\psi_1(z)\psi_2(z)\mathbb{1}(z)\}$$

2) 特異点を共有しない2つの超関数の積

$$f_1(x)\cdot f_2(x) \overset{def}{=} \sum_{p=0}^{N} \rho(a_p, a_{p+1})\{f_1(x)\cdot f_2(x)\}$$

ただし、区間 (a_p, a_{p+1}) では $f_1(x)$, $f_2(x)$ のどちらか一方が正則になるように分点 $x=a_p$ $(p=1,2,\dots,N)$ を選ぶ。$(a_0\equiv a,\ a_{N+1}\equiv b)$

3) 上(下)型超関数どうしの積

下成分が0の母関数をもつ超関数を上型超関数という。すなわち、$\varphi(z)$ が $0<\mathrm{Im}\,z<A_+$ (A_+ はある正数)で正則な解析関数であるとすると、$\text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbb{1}_+(z)\}\equiv\text{H.F.}[\varphi(z), 0]$ は上型の超関数である。これを記号的に

$$[\varphi(x)]_+ \equiv \varphi(x+i0) \overset{def}{=} \text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbb{1}_+(z)\}$$

のように表わす。下型の超関数も同様に定義される:

$$[\varphi(x)]_- \equiv \varphi(x-i0) \overset{def}{=} \text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbb{1}_-(z)\}$$

そして、上(下)型超関数どうしの積は

$$[\varphi_1(x)]_\pm\cdot[\varphi_2(x)]_\pm \overset{def}{=} \text{H.F.}\{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\mathbb{1}_\pm(z)\}$$

で定義する．積もまた上（下）型である．

なお，$\varphi(z)$ が $\mathrm{Im}\, z = 0$ でも正則であれば

$$\varphi(z)\mathbb{1}_+(z) \cong \varphi(z)\mathbb{1}_-(z) \cong \varphi(z)\mathbb{1}(z)$$

であるから，

$$\varphi(x \pm i0) = [\varphi(x)]_\pm = \varphi(x)$$

である．

$\varphi(z)$ が $0 \lesseqgtr \mathrm{Im}\, z \lesseqgtr \pm\infty$ で正則のばあい，$[\varphi(x)]_\pm$ は <u>上（下）超関数</u> であるという．

<u>定理</u>：　上型かつ下型の超関数は解析関数である．また，上かつ下の超関数は整関数である．

（<u>例</u>）

$$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm = \frac{1}{x \pm i0} = \frac{1}{x} \mp \pi i\, \delta(x)$$

$$[\delta(x)]_\pm = \delta(x \pm i0) = \pm \frac{1}{2}\delta(x) - \frac{1}{j}\frac{1}{x}$$

$$[\mathrm{Log}\, x]_\pm = \mathrm{Log}(x \pm i0) = \log|x| \pm \pi i\, H(-x)$$

$$[H(x)]_\pm = H(x \pm i0) = \pm\frac{1}{2}H(x) - \frac{1}{j}\log|x|$$

$$[x^\alpha]_\pm = (x \pm i0)^\alpha = |x|^\alpha e^{\pm \alpha\pi i H(-x)}$$

$$\left[\frac{1}{x^m}\right]_\pm = \frac{1}{(x \pm i0)^m} = \frac{1}{x^m} \pm \pi i \frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$$

$$\mathcal{F}\, |x|^\alpha H(x) = \Gamma(\alpha+1)\left[(j\xi)^{-(\alpha+1)}\right]_-$$

$$= \Gamma(\alpha+1)\, |2\pi\xi|^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\pi}{2}(\alpha+1)i\,\mathrm{sgn}\,\xi}$$

$$\varphi(x \pm i0) = \varphi\{-(-x \mp i0)\} = \overline{\varphi}(x \mp i0)$$

上(下)型超関数の関数

上(下)型超関数の積はまた上(下)型であるから，四則演算の結果も上(下)型になる．さらに，ふつうの関数と同様，超関数の関数を考えることもできる．すなわち，$\varphi(z)$, $F(z)$ が，もし $\varphi(z)$, $F\{\varphi(z)\}$ が x 軸上でたかだか孤立特異点しかもたないような解析関数であれば，

$$F\{[\varphi(x)]_\pm\} \stackrel{\text{def}}{=} [F\{\varphi(x)\}]_\pm$$

によって $[\varphi(x)]_\pm$ の関数が定義されるのである。これは，物理学，とくに流体力学の問題の考察に超関数論を応用する際にきわめて重要である．

§8. 標準母関数

超関数の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は，a, b が有限であるかぎり，つねに存在する．しかし，$a \to -\infty$, $b \to \infty$ では必ずしも存在しない．そこで，無限積分の適用範囲をひろげるために，無限主値積分の概念を導入する：

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

ふつうの意味での無限積分が存在するばあいは，むろん無限主値積分は存在する．‘たたみこみ’を $\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(z-t)\,dt$ などで定義しておくと適用範囲が広くなる．

無限級数についても，<u>無限主値級数</u>を定義しておくと便利である：

$$\mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n$$

これは Fourier 級数の理論に応用される．

超関数 $f(x)$ に対して

$$\tilde{F}(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{J}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \equiv f(x) * \delta(z)$$

が存在するとき，$\tilde{F}(z)$ を $f(x)$ の<u>標準母関数</u>という．$\tilde{F}(z)$ は（もし存在すれば）$f(x)$ に対して一義的にきまり，しかも上半平面および下半平面で正則という好ましい性質をもっている．そして $[\tilde{F}(x)]_\pm$ は §7 で定義した<u>上（下）超関数</u>である．記号的に

$$\tilde{F}(z) = \mathrm{G.\tilde{F}.}\, f(x)$$

と表わす．

（<u>例</u>）
$$\mathrm{G.\tilde{F}.}\, 1 = \mathbb{1}(z)$$
$$\mathrm{G.\tilde{F}.}\, \frac{1}{(x-c)^m} = \frac{1}{(z-c)^m}\mathbb{1}_\mp(z), \quad \mathrm{Im}\, c \gtrless 0, \; m=1,2,\dots$$
$$\mathrm{G.\tilde{F}.}\, e^{ikx} = e^{ikz}\mathbb{1}_\pm(z), \quad k \gtrless 0$$
$$\mathrm{G.\tilde{F}.}\, e^{-\alpha x^2} = \pm\frac{1}{2} e^{-\alpha z^2}\mathrm{erfc}(\mp i\alpha^{\frac{1}{2}} z), \; \mathrm{Im}\, z \gtrless 0, \; (\mathrm{Re}\,\alpha \geqq 0)$$

<u>定理</u>： $F_+(z)$, $F_-(z)$ はそれぞれ $\mathrm{Im}\, z > 0$, $\mathrm{Im}\, z < 0$ で正則で；$|x| \to \infty$ のとき有界，$\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ のとき x に関して一

様に $F_\pm(z) \longrightarrow c_\pm$ （定数）であるような解析関数とする。このとき $F(z)=[F_+(z), F_-(z)]$，$\tilde{F}(z)=F(z)-\frac{1}{2}(c_+ + c_-)$ とすれば，$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ の標準母関数は $\tilde{F}(z)$ である。

このような性質をもつ超関数を，記号的に $f(\pm i\infty)=c_\pm$ として表わす。

§ 9. 周期超関数

定義： ある実数 l に対して

$$f(x+l)=f(x)$$

の関係を満足する超関数 $f(x)$ を周期 l の周期超関数という。記号的に $f(x,l)$ で表わすことがある。

諸定理： 周期超関数 $f(x,l)$ は標準母関数 $\tilde{F}(z,l)$ をもつ。

$$\tilde{F}(z,l)=F_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{F_0(z+nl)+F_0(z-nl)\}$$

$$F_0(z)=\mathrm{G.}\tilde{\mathrm{F}}\{f(x)H(x;x_0,x_0+l)\}$$

$$=\frac{1}{j}\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{f(x)}{x-z}dx$$

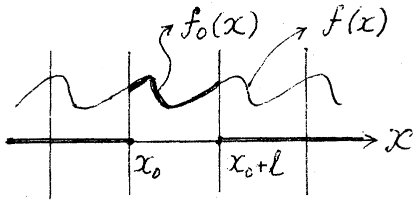

図 5

ただし，x_0 は $f(x)$ の任意の正則点である。また

$$f_0(x)=f(x)H(x;x_0,x_0+l)$$

は $f(x)$ を 1 周期分だけ切りとった超関数である。

$\tilde{F}(z,l)$ はつぎの形にも表わされる。

$$\tilde{F}(z,l) = c_0 \mathbb{1}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{njz/l} \mathbb{1}_+(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-njz/l} \mathbb{1}_-(z)$$

ただし，$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \leqq 1$．この式の H.F. をとると

$$f(x,l) = c_0 + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{njx/l}\Big]_+ + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-njx/l}\Big]_-$$

が得られる．すなわち，$f(x,l)$ は上超関数と下超関数とに具体的に分解される．上の式をつぎのように略記する．

$$f(x,l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{njx/l}$$

すなわち <u>Fourier 級数</u> である．これを <u>Fourier 変換</u> すると，

$$g(\xi) \equiv \mathscr{F} f(x,l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\xi - nl)$$

係数 c_n は具体的につぎのように与えられる：

$$c_n = \frac{1}{l} g_0\Big(\frac{n}{l}\Big) = \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} f(x) e^{-njx/l} dx$$

$$g_0(\xi) = \mathscr{F} f_0(x) = \int_{x_0}^{x_0+l} f(x) e^{-j\xi x} dx$$

周期超関数 $f(x,l)$ を Fourier 展開するということは，標準母関数 $\tilde{F}(z,l)$ を求めることにほかならない。

（<u>例</u>）<u>δ 関数列</u>： $\delta(x,l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nl)$

<u>階段関数</u>： $H(x,l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} H(x-nl) - \sum_{n=1}^{\infty} H(-x-nl)$

$$\delta(z,l) = G.\tilde{F}.\ \delta(x,l) = \frac{i}{2l} \cot\frac{\pi z}{l}$$

$$H(z,l) = G.F.\ H(x,l) = -\frac{1}{j} \log\Big\{2 \sin\frac{\pi(-z)}{l}\Big\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{z}{l}\right)\mathbb{1}(z) - \frac{1}{j}\,\mathrm{Log}\left(1-e^{\pm j z/l}\right), \quad \mathrm{Im}\, z \gtrless 0$$

$$H(x,l) = \frac{x}{l} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi n x}{l}$$

$$\delta(x,l) = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{nj x/l}$$

$$= \frac{1}{l}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi n x}{l}\right\}$$

$$\delta(x,l) = \frac{d}{dx}H(x,l)$$

$$\mathcal{F}\,\delta(x,l) = \frac{1}{l}\,\delta(\xi, 1/l)$$

§ 10. たたみこみとFourier変換

$g(\xi) = \mathcal{F} f(x)$ とすれば $f(x)$ は $g(\xi)$ の Fourier逆変換 とよばれ，$f(x) = \mathcal{F}^{-1} g(\xi)$ と表わす．

基本的性質

$$G(\zeta) = \mathcal{F} F(z) \longrightarrow F(z) = \mathcal{F}^{-1} G(\zeta) = \left[\int_{\gamma}^{\infty}, \int_{\gamma}^{-\infty}\right] g(\xi) e^{jz\xi} d\xi$$

$$\mathcal{F} F(-z) = G(-\zeta), \quad \mathcal{F}\bar{F}(z) = -\bar{G}(-\zeta), \quad \mathcal{F}\bar{F}(-z) = -\bar{G}(\zeta)$$

$$\mathcal{F} f(-x) = g(-\xi), \quad \mathcal{F}\,\overline{f(x)} = \overline{g(-\xi)}, \quad \mathcal{F}\,\overline{f(-x)} = \overline{g(\xi)}$$

$$\mathcal{F} f(ax+b) = \frac{1}{|a|} e^{j(b/a)\xi} g(\xi/a) \qquad (a, b = \text{実数})$$

$$\mathcal{F}\{e^{jkx} f(x)\} = g(\xi - k) \qquad (k = \text{実数})$$

$$\mathcal{F}\{x f(x)\} = -\frac{1}{j} g'(\xi)$$

$$\mathcal{F} f'(x) = j\xi g(\xi)$$

$$\mathcal{F}\varphi(x+c) = e^{jc\xi}\,\mathcal{F}\varphi(x \pm i0) \qquad (0 \lesseqgtr \mathrm{Im}\, c \lesseqgtr A_{\pm})$$

ただし，$\varphi(z)$ は $0 \lesseqgtr \mathrm{Im}\, z \lesseqgtr A_{\pm}$ で正則

$$\mathcal{F}\mathcal{F} F(z) = -F(-z), \qquad \mathcal{F}\mathcal{F} f(x) = f(-x)$$

$$F(z) = \mathcal{F}^{-1} G(\zeta) = -\mathcal{F} G(-\zeta)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} g(\xi) = \mathcal{F} g(-\xi)$$

$$f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$$

$$\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} * f(x) = c_1 f_1(x) * f(x) + c_2 f_2(x) * f(x)$$

$$\{f_1(x) * f_2(x)\} * f_3(x) = f_1(x) * \{f_2(x) * f_3(x)\}$$

$$\frac{d}{dx}\{f_1(x) * f_2(x)\} = f_1'(x) * f_2(x) = f_1(x) * f_2'(x)$$

$$x\{f_1(x) * f_2(x)\} = \{x f_1(x)\} * f_2(x) + f_1(x) * \{x f_2(x)\}$$

$$f_1(ax+b) * f_2(ax+c) = \frac{1}{|a|}(f_1 * f_2)(ax+b+c)$$

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \mathcal{F} f_1(x) \cdot \mathcal{F} f_2(x)$$

$$\text{O.F.} \quad \mathcal{F} f(x) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$$

とくに $g(0) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \quad g(\xi) = \mathcal{F} f(x)$

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi) \cdot g_2(-\xi)\, d\xi \qquad \text{(Parseval)}$$

$$\mathrm{P}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(ml) = \frac{1}{l}\, \mathrm{P}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n/l) \qquad \text{(Poisson)}$$

$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

$$f(x,l) = f_0(x) * \delta(x,l) \qquad \text{(周期超関数)}$$

$$f_0(x) = f(x) \cdot H(x;\, x_0,\, x_0+l)$$

$$f(x) * \delta(x,l) = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{l}\right) e^{njx/l}$$

たたみこみやFourier変換を行なうばあい，超関数の偶奇性，虚実性，左右性，上下性 の知識が有用である．上下性については§7で説明した。

$$f(-x) \overset{\text{def}}{=} -\text{H.F. } F(-z)$$

$$\overline{f(x)} \overset{\text{def}}{=} -\text{H.F. } \bar{F}(z), \qquad \bar{F}(z) \equiv \overline{F(\bar{z})}$$

$$F(-z) = \pm F(z) \quad (\text{偶, 奇})$$

$$\bar{F}(z) = \pm F(z) \quad (\text{実数型, 虚数型})$$

$$f(-x) = \pm f(x) \quad (\text{偶, 奇})$$

$$\overline{f(x)} = \pm f(x) \quad (\text{実, 虚})$$

$$F(z) = F_r(z) + i F_i(z), \quad F_r(z), F_i(z) \text{ はともに実数型}$$

ある適当な実数 k をとるとき，$x > k$ ($x < k$) に対して $f(x) = 0$ であるような超関数を左(右)超関数という．左かつ右の超関数を中央超関数 という．

諸定理

母関数と超関数で，偶奇性と虚実性とは逆転する．

Fourier変換に際して，偶奇性は不変である．$f(x)$ が偶ならば虚実性は不変，奇ならば逆転する．

Fourier変換に際して，左右性，上下性は 右 → 下 → 左 → 上 → 右 のように変る．たとえば $\mathcal{F}$(右超関数) = 下超関数 である．（時計方向に回ると記憶すればよい！）

$\mathcal{F}$(中央超関数) $=$ 整関数

偶(奇)超関数どうしのたたみこみは偶超関数である.

偶超関数と奇超関数のたたみこみは奇超関数である.

実(虚)超関数どうしのたたみこみは実超関数である.

実超関数と虚超関数のたたみこみは虚超関数である。

中央超関数と任意の超関数のたたみこみは存在する.

左(右)超関数どうしのたたみこみは存在する.

任意の実数 a に対して $f_1(x)f_2(a-x)$ が $|x|\to\infty$ で積分可能であれば, $f_1(x)*f_2(x)$ は存在する。

中央超関数と任意の超関数のたたみこみは中央超関数である.

左(右)超関数どうしのたたみこみは左(右)超関数である.

上(下)型の超関数と任意の超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 上(下)型である.

上型の超関数と下型の超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 正則である.

上(下)超関数と任意の超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 上(下)超関数である.

上超関数と下超関数のたたみこみは, もし存在すれば, 整関数である.

無限主値積分の意味で $f_1(x)*f_2(x)$, $f_2(x)*f_1(x)$ のどちらか一方が存在するものとする. このとき, 他方も存在して交

換法則：$f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$ が成り立つための必要十分条件は，任意の実数 a に対して $\lim_{R\to\infty} \int_R^{R+a} f_1(t) F_2(z-t)\,dt = 0$ が成り立つことである．

(例) $f(x) * e^{jkx} = g(k)$, $\quad g(\xi) = \mathcal{F} f(x)$

$$f(x) * 1 = g(0)$$

$x * 1 = 0$, $\quad 1 * x = ?$ （存在しない）

$\mathrm{sgn}\, x * 1 = 0$, $\quad 1 * \mathrm{sgn}\, x = 2x$ ・・・ 交換不能

$$1/x * 1 = 1 * 1/x = 0$$

$f(x) * H(x) = H(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ （$f(x)$ は右超関数）

$$H(x) * H(x) = x H(x)$$

$$\frac{1}{x} H(x) * H(x) = \log|x|\, H(x)$$

$\frac{1}{x} * \frac{1}{x} = -\pi^2 \delta(x)$, $\quad \frac{1}{x} * \frac{1}{x \pm i0} = \mp \pi i \frac{1}{x \pm i0}$

$\frac{1}{x \pm i0} * \frac{1}{x \pm i0} = \mp j \frac{1}{x \pm i0}$, $\quad \frac{1}{x \pm i0} * \frac{1}{x \mp i0} = 0$

$$\frac{1}{x+a_1} * \frac{1}{x+a_2} = -\pi^2 \delta(x + a_1 + a_2)$$

$\frac{1}{x+a} * \frac{1}{x+c} = \mp \pi i \frac{1}{x+a+c}$, $\quad \mathrm{Im}\, c \gtrless 0$

$$\frac{1}{x+c_1} * \frac{1}{x+c_2} = \begin{cases} \mp j \frac{1}{x+c_1+c_2}, & \sigma_1 = \sigma_2 \gtrless 0 \\ 0, & \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

ただし，$\sigma_1 = \mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\, c_1$, $\quad \sigma_2 = \mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\, c_2$

§11. Hilbert 変換

ふつうの関数 $f(x)$ に対して

$$\mathcal{H} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt$$

をその Hilbert 変換という. ここで P は Cauchy の主値を意味する. 被積分関数は $t=x$ に特異性をもつからである. 積分は'たたみこみ'の形をしているので, 超関数に対しては

$$\mathcal{H} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) * \frac{-1}{\pi x}$$

によって Hilbert 変換を定義するのがよいだろう. $\mathcal{H} f(x)$ は $f(x)$ の共役超関数ともよばれる. $f(x)$ の共役超関数はしばしば記号 $[f(x)]^*$ あるいは $f^*(x)$ のように表わされる. とくに $f(x)$ が周期超関数のばあいには, $f(x)$ は Fourier 級数で表わされるから, $f^*(x)$ も Fourier 級数となる. このとき $f^*(x)$ は $f(x)$ に対する共役 Fourier 級数という.

超関数 $f(x)$ に対する標準母関数 $\hat{F}(z)$ の定義:

$$\hat{F}(z) = f(x) * \delta(z), \qquad \delta(z) = -\frac{1}{j}\frac{1}{z}$$

を思いおこすと,

$$[\hat{F}(x)]_\pm = f(x) * [\delta(x)]_\pm, \quad [\delta(x)]_\pm = \pm\frac{1}{2}\delta(x) - \frac{1}{j}\frac{1}{x}$$

の関係によって

$$f(x) = [\hat{F}(x)]_+ - [\hat{F}(x)]_-, \quad \mathcal{H} f(x) = i\{[\hat{F}(x)]_+ + [\hat{F}(x)]_-\}$$

$$(1 \mp i\mathcal{H}) f(x) = \pm 2 f(x) * [\delta(x)]_\pm = \pm 2[\hat{F}(x)]_\pm$$

が得られる．もしも $f(\pm i\infty)=c_\pm$ ならば，$2i\tilde{F}(z)\mathbb{1}(z)$ も同じ性質をもち，したがって標準母関数になり得る（$\mathrm{Im}\,z\to\pm\infty$ で $\tilde{F}(z)\to 0$ になるように $c\mathbb{1}(z)$ を差し引いておく．c は適当な定数)．そして

$$\mathcal{H}f(x) = 2i\ \mathrm{H.F.}\{\tilde{F}(z)\mathbb{1}(z)\}$$

である．

$\tilde{F}(z)$ として任意に適当な解析関数をとれば，ただちに $[\tilde{F}(x)]_+$, $[\tilde{F}(x)]_-$ が見出され，したがってそれらを組み合わせることにより $f(x)$ と $\mathcal{H}f(x)$ の表をつくることができる．

諸定理：

$$\mathcal{H}\mathcal{H}f(x) = -f(x), \quad (f(\pm i\infty)=0)$$

$$[f^*(x)]^* = -f(x)$$

$$\mathcal{H}1 = 0, \quad \mathcal{H}e^{ikx} = \pm i\, e^{ikx} \quad (k \gtrless 0)$$

$$\mathcal{H}\sin kx = \cos kx, \quad \mathcal{H}\cos kx = -\sin kx \quad (k>0)$$

$$\mathcal{H}\delta(x) = -\frac{1}{\pi x}, \quad \mathcal{H}\frac{1}{x} = \pi\delta(x)$$

$$\mathcal{H}\delta(x,l) = -\frac{1}{l}\cot\frac{\pi x}{l}, \quad \mathcal{H}\cot\frac{\pi x}{l} = l\delta(x,l)-1$$

$f_1(x)$ は中央超関数，$f_2(x)$ は $f_2(\pm i\infty)=c_\pm$ とすれば

$$\mathcal{H}\{f_1(x)*f_2(x)\} = f_1(x)*\mathcal{H}f_2(x)$$

$$f(x,l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nj x/l}, \quad \mathcal{H}f(x,l) = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\mathrm{sgn}\,n)c_n e^{nj x/l}$$

$$\mathcal{H}f(x,l) = f_0(x)*\mathcal{H}\delta(x,l) = -\frac{1}{l}f_0(x)*\cot\frac{\pi x}{l}$$

$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ が標準母関数 $\tilde{G}(\zeta)$ をもつならば

$$\mathcal{F}\{f(x)\cdot H(\pm x)\}=\mp[\tilde{G}(\xi)]_{\mp}$$

である．ただし，$f(x)$ は $x=0$ で正則とする．

§12. Poisson-Schwarz の積分公式

境界上で実数部あるいは虚数部を与えて内部の領域で正則な解析関数を求めるという問題は2次元のポテンシャルの問題で基本的な役割を演ずる．境界値が特異性をもつばあい，すなわち超関数として与えられているばあいのとり扱いを行なう．境界が円あるいは直線のばあいについて具体的な公式を導く。

半平面：

$F_\pm(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ で正則で，$\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ のとき定数 $c_\pm = a_\pm + ib_\pm$ になるような解析関数とする．このとき，つぎの関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
[F(x)]_\pm &= \pm 2\,\mathrm{Re}\,[F(x)]_\pm * [\delta(x)]_\pm + ib_\pm \\
&= (1\mp i\mathcal{H})\,\mathrm{Re}[F(x)]_\pm + ib_\pm \\
&= \pm 2i\,\mathrm{Im}\,[F(x)]_\pm * [\delta(x)]_\pm + a_\pm \\
&= i(1\mp i\mathcal{H})\,\mathrm{Im}\,[F(x)]_\pm + a_\pm,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\pm(z) &= \pm 2\,\mathrm{Re}\,[F(x)]_\pm * \delta(z) + ib_\pm \\
&= \pm 2i\,\mathrm{Im}\,[F(x)]_\pm * \delta(z) + a_\pm
\end{aligned}$$

周期超関数 $F(z,\ell)$ のばあいには，$[F_0(x)]_\pm \stackrel{def}{=} [F(x,\ell)]_\pm \cdot H(x;x_0,x_0+\ell)$ を使って

$$[F(x,\ell)]_\pm = \pm 2\,\mathrm{Re}[F_0(x)]_\pm * [\delta(x,\ell)]_\pm + ib_\pm$$
$$= \pm 2i\,\mathrm{Im}[F_0(x)]_\pm * [\delta(x,\ell)]_\pm + a_\pm,$$
$$F_\pm(z,\ell) = \pm 2\,\mathrm{Re}[F_0(x)]_\pm * \delta(z,\ell) + ib_\pm$$
$$= \pm 2i\,\mathrm{Im}[F_0(x)]_\pm * \delta(z,\ell) + a_\pm$$
$$\delta(z,\ell) = \frac{i}{2\ell}\cot\frac{\pi z}{2\ell}$$

$[F(x,\ell)]_\pm$ の実数部あるいは虚数部が Fourier 級数として与えられているばあいは非常に簡単である．

$$\mathrm{Re}[F(x,\ell)]_\pm = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nj x/\ell} \longrightarrow F_\pm(z,\ell) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{\pm n} e^{\pm nj z/\ell}$$
$$\mathrm{Im}[F(x,\ell)]_\pm = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nj x/\ell} \longrightarrow F_\pm(z,\ell) = i\left\{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{\pm n} e^{\pm nj z/\ell}\right\}$$

$Z = e^{jz/\ell}$ とおけば上(下)半平面は単位円の内(外)部に写像されるから，上の公式は<u>単位円に関する Poisson-Schwarz の公式</u>になる．

<u>$x>0$ で実(虚)数部，$x<0$ で虚(実)数部を与える:</u>

$F_\pm(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ で正則で，$z\to\infty$ のとき，適当な整数 p に対して $z^{-p}F_\pm(z)$ が有界であるような解析関数とする． このとき

$$F_\pm(z) = 2z^{p+1/2}\left[|x|^{-(p+1/2)}\{\mathrm{Im}[F(x)]_\pm H(-x) \pm \mathrm{Re}[F(x)]_\pm H(x)\} * \delta(z)\right]$$
$$+ i z^{p-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$
$$= -2i z^{p+1/2}\left[|x|^{-(p+1/2)}\{\mathrm{Re}[F(x)]_\pm H(-x) \mp \mathrm{Im}[F(x)]_\pm H(x)\} * \delta(z)\right]$$
$$+ z^{p-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

が成り立つ。ただし，a_n, b_n は適当な実数定数とする。

x軸上の区間 (a, b) で実（虚）数部，残りの区域で虚（実）数部を与える：

$F_\pm(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \geqq 0$ で正則で，$z \to \infty$ のとき，適当な整数 p, q に対して $z^{-(p+q)} F_\pm(z)$ が有界であるような解析関数とする．このとき

$$F_\pm(z) = 2Q(z)\left[|Q(x)|^{-1}\{\mathrm{Im}[F(x)]_\pm H(x;a,b) \pm \mathrm{Re}[F(x)]_\pm \mathrm{sgn}(x;a,b)\} * \delta(z)\right]$$
$$+ iQ(z) \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{b_n}{(z-b)^{n+1}}\right\}$$
$$= -2iQ(z)\left[|Q(x)|^{-1}\{\mathrm{Re}[F(x)]_\pm H(x;a,b) \mp \mathrm{Im}[F(x)]_\pm \mathrm{sgn}(x;a,b)\} * \delta(z)\right]$$
$$+ Q(z) \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{b_n}{(z-b)^{n+1}}\right\}$$

が成り立つ．ただし，$a < b$ とし，

$$Q(z) = (z-a)^{p+1/2}(z-b)^{q+1/2}$$
$$H(x;a,b) = H(x-a) - H(x-b)$$
$$\mathrm{sgn}(x;a,b) = H(x-b) - H(a-x)$$

とする．また，a_n, b_n は適当な実数定数である．

Hilbert変換に関連する積分方程式

1) $g(\pm i\infty) = 0$ ならば

$$\mathcal{H} f(x) = g(x)$$

を満足する $f(x)$ が存在して,

$$f(x) = -\mathcal{H} g(x) + c$$

で与えられる. ただし, c は任意定数である.

2) 積分方程式: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t-x} dt = g(x),\quad x>0$

の解は, もし存在すれば,

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} x^{1/2} \cdot \mathcal{H}\{|x|^{-1/2} g(x) H(x)\} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{n+1/2}},\quad x>0$$

で与えられる. ただし, c_n は任意の定数である.

3) 積分方程式: $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt = g(x),\quad a<x<b$

の解はつねに存在し,

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} |Q(x)| \cdot \mathcal{H}\{|Q(x)|^{-1} g(x) H(x;a,b)\}$$
$$+ |Q(x)| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{c_n}{(x-a)^{n+1}} + \frac{c_n'}{(x-b)^{n+1}} \right\}$$

で与えられる. ただし, $Q(z) = \{(z-a)(z-b)\}^{1/2}$. また, c_0, c_0' は適当な定数, c_n, c_n' $(n>0)$ は任意の定数である.

§ 13. Hilbert変換の公式

$\mathcal{H}$ によって上下型性，虚実性は不変，偶奇性は変化する．

$$\mathrm{O.F.}\{\mathcal{H} f(x)\} = \mathcal{H}\{\mathrm{O.F.}\, f(x)\}$$

$$\mathcal{H} f(x) = 2i\ \mathrm{H.F.}\{\hat{F}(z)\mathbb{1}(z)\}$$

Hilbert変換の存在するための必要十分条件は標準母関数が存在することである．

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}\mathcal{H} f(x) &= -f(x), \\ \mathcal{H}[F(x)]_\pm &= \pm i[F(x)]_\pm \\ \mathcal{H}\,\mathrm{Re}[F(x)]_\pm &= \mp \mathrm{Im}[F(x)]_\pm \\ \mathcal{H}\,\mathrm{Im}[F(x)]_\pm &= \pm \mathrm{Re}[F(x)]_\pm \end{aligned}\right\} \text{ただし，} f(\pm i\infty)=0$$

$$\mathcal{H}\{f_1(x) * f_2(x)\} = f_1(x) * \mathcal{H} f_2(x)$$

ただし，$f_1(x)$ は中央超関数，$f_2(\pm i\infty) = 0$

$$\mathcal{H} f'(x) = \frac{d}{dx}\mathcal{H} f(x)$$

$$\mathcal{H} f(ax+b) = \mathrm{sgn}\, a\ h(ax+b), \quad h(x) = \mathcal{H} f(x)$$

$$\mathcal{H}\{(x-a)^n f(x)\} = (x-a)^n \mathcal{H} f(x) + \sum_{p=1}^{n} C_p (x-a)^{n-p}$$

$$C_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-a)^{p-1}\,dx$$

$$\mathcal{H} H(x;a,b) = -\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

$$\mathcal{H}\{x^n H(x;a,b)\} = -\frac{1}{\pi}\left\{x^n \log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}(b^p - a^p)x^{n-p}\right\}$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} H(x;-1,1)\right\} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{sgn}(x;-1,1)$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,H(x;-1,1)\right\} = -\frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{sgn}(x;-1,1) + \sum_{p=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}\,x^{n+1-2p}$$

$$\mathcal{H}\{|Q(x)|^{-1}H(x;a,b) = -|Q(x)|^{-1}\,\mathrm{sgn}(x;a,b)$$

$$\mathcal{H}\{|Q(x)|\,H(x;a,b) = |Q(x)|\,\mathrm{sgn}(x;a,b) - x + \tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{(x-a)^n}{|Q(x)|}\,H(x;a,b)\right\} = -\frac{(x-a)^n}{|Q(x)|}\,\mathrm{sgn}(x;a,b) + \sum_{p=1}^{n} \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}\,(b-a)^{p-1}(x-a)^{n-p}$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{(x-b)^n}{|Q(x)|}\,H(x;a,b)\right\} = -\frac{(x-b)^n}{|Q(x)|}\,\mathrm{sgn}(x;a,b) + \sum_{p=1}^{n} \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}\,(a-b)^{p-1}(x-b)^{n-p}$$

$$\mathcal{H}\,|x|^\alpha H(\pm x) = \mp\,\mathrm{cosec}\,\pi\alpha\,|x|^\alpha\{\cos\pi\alpha\,H(\pm x) + H(\mp x)\},\quad (\mathrm{Re}\,\alpha<0)$$

$$\mathcal{H}\,|x|^\alpha = \tan(\pi\alpha/2)\,|x|^\alpha\,\mathrm{sgn}\,x,\quad (\mathrm{Re}\,\alpha<1)$$

$$\mathcal{H}\,|x|^\alpha\,\mathrm{sgn}\,x = -\cot(\pi\alpha/2)\,|x|^\alpha,\quad (\mathrm{Re}\,\alpha<0)$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{x^m}H(\pm x)\right\} = \mp\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^m}\log|x| - \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)$$

$$\mathcal{H}\,\frac{1}{x^m} = -\pi\,\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\,\delta^{(m-1)}(x)$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{x^m}\,\mathrm{sgn}\,x\right\} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{x^m}\log|x|$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{x^m}\log|x|\,H(\pm x)\right\} = \mp\left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{x^m}(\log|x|)^2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^m}H(\pm x)\right\}$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{x^m}\log|x|\right\} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^m}\,\mathrm{sgn}\,x$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{x^m}\log|x|\,\mathrm{sgn}\,x\right\} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^m}(\log|x|)^2 + \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^m}$$

$$Q(z) = \{(z-a)(z-b)\}^{1/2}$$

§ 14. おわりに

超関数論は今後理工学の各分野において有力な数学的道具として広く用いられることだろう．しかし，数学の基礎的訓練を受けていないものにとっては，近づき難い感じがするのが現状である．この点，Lighthill の著書[1] は，数学的素養のとぼしいものにも理解し易く，絶好の入門書ということができる．しかし，これは，関数列の極限として超関数を定義するという立場をとるものである．解析関数の境界値として超関数をとらえるという‘佐藤の超関数論’[2] の立場は，超関数論の応用を志すものにとってはより理解し易いと思われる．

Lighthill の著書に範をとり，佐藤の超関数論の立場に立って‘応用超関数論’の構成を試みた結果[3]，この予想の正しいことを確信することができた。

参考文献

1) M.J. Lighthill: *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions* (Cambridge Univ. Press, 1958)
高見穎郎 訳：フーリエ解析と超関数（ダイヤモンド社，1975）

2) 佐藤幹夫：超関数論の理論について，「数学」10 (1958) 1~27

3) 今井 功：流体数学のすすめ II，超関数論，「数理科学」146号～188号（1975年8月～1979年2月）